

DEVOIR DE RENTRÉE

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

EXERCICE 1 Échauffement.

1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \quad (ii) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

2. Calculer soigneusement et en utilisant la formule du binôme les puissances A^n de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire un programme **Python** qui prend en paramètre un nombre réel A calcule et affiche le plus petit entier N tel que $u_n \geq A$, où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \exp(u_n) - e \ln(u_n) \end{cases}.$$

Vous prendrez soin de bien faire les appels de bibliothèques qui vous semblent nécessaires.

4. a. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

- b. Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution particulière de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

- c. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

EXERCICE 2 Analyse d'après **ECRICOME 2026** Exercice 3.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

PARTIE I

1. Déterminer le domaine de définition de f .

Dans les questions qui suivent, on note I le domaine de définition de f .

2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Dresser le tableau de variations de f sur I .
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

Les cubes sont encouragés à faire un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

5. Représenter, dans un même repère orthonormé, l'allure de la courbe représentative de f et sa tangente au point d'abscisse 0.

PARTIE II

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$

6. a. Donner la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.
b. Étudier la monotonie de la suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
c. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$.
7. Montrer que, pour tout réel x de $] -1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument.
8. a. Montrer que les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
b. En déduire que la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

- c. En utilisant la monotonie des suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$$

- d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.
9. Dans cette question uniquement, x est un réel strictement supérieur à 1.
 - a. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$.
 - b. En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $x \in [-1, 1[$, on pose $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

PARTIE III

Dans toute cette partie, a désigne un réel fixé dans l'intervalle $] - 1, 1 [$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale notée $R_n(a)$ définie par :

$$R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt$$

On considère à nouveau la fonction f définie à la Partie I ainsi que la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ et la fonction S définies à la Partie II.

10. a. Déterminer en fonction de a les valeurs de $\int_0^a \frac{1}{1-t} dt$ et $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt$.

- b. Montrer que $f(a) = a + R_1(a)$.

Indication : On pourra écrire $a - t = (a - 1) + (1 - t)$.

11. Montrer par intégration par parties que, pour tout entier naturel n non nul, $R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$.

12. En utilisant les résultats des questions 10.b et 11, montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$f(a) = S_n(a) + R_n(a).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence.

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $a \in [0, 1[$.

- a. Montrer que pour tout réel t de $[0, a]$, $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$.

- b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

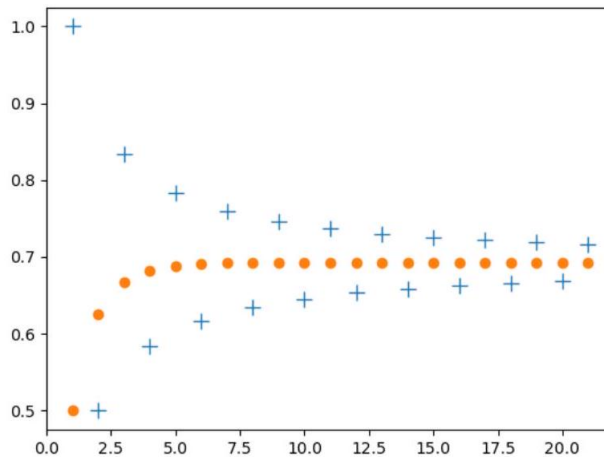
- c. En déduire que $f(a) = S(a)$.

14. a. En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

- b. Écrire une fonction en langage Python, nommée `Val`, prenant en argument `eps` désignant le réel ε strictement positif, qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

- c. Dans la figure suivante sont représentés les tracés des premiers termes des suites $(S_n(\frac{1}{2}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Identifiez les suites dans cette figure.



EXERCICE 3 Probabilités discrètes d'après EML 2026 Exercice 3..

La partie C est indépendante des parties A et B .

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$, on pose $q = 1 - p$. Lorsqu'on effectue une succession de $n \geq 2$ lancers avec cette pièce on note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- P_k l'évènement : « on obtient pile au k -ième lancer »,
- F_k l'évènement : « on obtient face au k -ième lancer ».

Par abus de notation, on omettra le symbole d'intersection entre ces évènements, ainsi on écrira $P_1 F_2 F_3$ au lieu de $P_1 \cap F_2 \cap F_3$. Enfin, on appelle :

- double pile tout évènement de la forme $P_{k-1} P_k$ avec $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,
- pile isolé tout évènement de la forme $P_1 F_2$ ou $F_{k-1} P_k F_{k+1}$ avec $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

PARTIE A : RANG MOYEN DU PREMIER DOUBLE PILE

On considère la première expérience aléatoire suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir un premier pile, puis on relance la pièce une seule fois. On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
- S l'évènement «le dernier lancer donne pile».

Exemple : si la succession de lancers donne $F_1 P_2 F_3$ alors on a $N = 3$ et l'évènement $\bar{S}$ est réalisé, si la succession de lancers donne $F_1 F_2 F_3 P_4 P_5$ alors on a $N = 5$ et l'évènement S est réalisé.

1. a. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N - 1$ qui donne le rang du premier lancer pile.
b. En déduire la loi de N , puis donner son espérance $\mathbf{E}(N)$ et sa variance $\mathbf{V}(N)$.
2. a. Soit $n \geq 2$, calculer la probabilité $\mathbf{P}((N = n) \cap S)$.
b. Montrer que $\mathbf{P}(S) = p$.

On s'intéresse maintenant à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir un premier double pile. On admet que cela revient à répéter de manière indépendante la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S . On note alors :

- R la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la première expérience aléatoire,
- T la variable aléatoire égale au nombre total de lancers effectués,

et, pour tout un entier $i \geq 1$,

- N_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers réalisés lors de la i -ème répétition de la première expérience aléatoire si $R \geq i$, et égale à 0 si $R < i$.

On admet que toutes ces variables aléatoires sont bien définies presque sûrement.

Exemple : la série de lancers $F_1 P_2 F_3 F_4 F_5 F_6 P_7 P_8$ se décompose en deux répétitions de la première expérience aléatoire, on a $F_1 P_2 F_3$ puis $F_4 F_5 F_6 P_7 P_8$, ce sont les deux exemples vus précédemment. Dans ce cas, on a $R = 2$, $T = 8$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ et $N_i = 0$ pour tout $i \geq 3$.

3. a. Déterminer la loi de R .
b. En moyenne, combien de piles isolés obtient-on avant le premier double pile?
4. Soit $i \geq 1$ un entier. On admet que la loi conditionnelle de N_i sachant $(R \geq i)$ est la loi de N .
a. Calculer $\mathbf{P}(N_i = 0)$.
b. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\mathbf{P}(N_i = k) = pq^{i+k-3}$.
c. Montrer que N_i admet une espérance donnée par : $\mathbf{E}(N_i) = q^{i-1} \frac{1+p}{p}$.
5. Établir que la série $\sum_{i \geq 1} \mathbf{E}(N_i)$ converge et calculer sa somme.

Par définition des variables aléatoires N_i on a $T = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$$

Notez que cette somme est (presque sûrement) bien définie puisque $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i > R(\omega)$.

6. Soit $n \geq 2$.

- a. Justifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(N_1 + \dots + N_n = k)$.
- b. En déduire que : $\sum_{k=2}^n k \mathbf{P}(T = k) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(N_i)$.
- c. Établir que T admet une espérance.

7. Conclure que $\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{E}(N_i)$.

PARTIE B : SIMULATION INFORMATIQUE

Rappel Python : la commande `rd.random()` renvoie un nombre dans $[0,1[$ selon la loi uniforme sur $[0,1[$.¹

8. Recopier et compléter la fonction `Exp_1(p)` ci-dessous qui simule la première expérience aléatoire (décrite en début de partie A). Cette fonction prend en argument le paramètre $p \in]0, 1[$ et renvoie un couple d'entiers (N, S) , où N représente le nombre de lancers effectués, et $S \in \{0, 1\}$ prend la valeur 1 si le dernier lancer a donné pile et 0 sinon.

```

1 def Exp_1(p):
2     N = 1
3     while ..... :
4         N = N + 1
5     if ..... :
6         S = .....
7     else:
8         S = .....
9     return N+1, S

```

9. Rédiger une fonction `Exp_2(p)` qui simule la deuxième expérience aléatoire consistant à répéter la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S . Cette fonction prend en argument le paramètre p et renvoie le couple d'entiers (R, T) , où R est le nombre de répétitions de la première expérience aléatoire, et T est le nombre total de lancers effectués.

On vous demande de suivre cet algorithme :

On affecte aux variables R, S et T la valeur 0.
 Tant que $S = 0$:
 On augmente la variable R de 1
 On affecte à la variable E le résultat de `Exp_1(p)`
 On affecte à la variable S la deuxième composante de E
 On ajoute à la variable T la première composante de E
 On renvoie le couple (R, T)

10. a. Rédiger une fonction `Freq_T(n,p)` qui prend en argument un entier $n \geq 2$ ainsi que le paramètre p , et qui renvoie la fréquence d'apparition de n parmi 10^4 réalisations de la variable aléatoire T (on pourra simuler T par la deuxième composante de `Exp_2(p)`).
- b. En exécutant la commande `Freq_T(4,1/2)` l'ordinateur affiche 0.123. Ce résultat vous paraît-il cohérent ? Justifier votre réponse.

1. Pour les carrés : c'est-à-dire avec équiprobabilité (nous définirons proprement cette loi au cours de l'année).

PARTIE C : NOMBRE DE DOUBLES PILES

Attention, les questions **12.b**, la 2ème partie de la question **13.a** (calcul de la variance) et **14** sont réservés aux cubes ou aux carrés qui auraient déjà lu les chapitres Couples de variables discrètes et Convergence et Estimation.

On réalise une succession infinie de lancers avec la même pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p , et on note $(Y_n)_{n \geq 1}$ la suite de variables aléatoires définies par :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_n P_{n+1} \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si on réalise un double pile lors des n -ième et $n+1$ -ième lancers.

11. Soit $n \geq 1$ un entier. Reconnaître la loi de Y_n , puis donner son espérance $\mathbf{E}(Y_n)$ et sa variance $\mathbf{V}(Y_n)$.

12. Soit n et m deux entiers avec $n \geq 1$ et $m \geq n+2$.

a. Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ? Même question avec Y_n et Y_m .

b. Calculer les covariances $\mathbf{cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\mathbf{cov}(Y_n, Y_m)$.

Soit $n \geq 1$ un entier, on s'intéresse à la variable aléatoire S_n égale au nombre de doubles piles survenus au cours des $n+1$ premiers lancers, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

13. a. Calculer l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$, et montrer que la variance $\mathbf{V}(S_n)$ est donnée par :

$$\mathbf{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

b. En déduire que :

$$\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq \frac{3p^2}{n}.$$

14. Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev établir :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$